Kodowanie liczb całkowitych w systemach komputerowych

System pozycyjny

- Systemy addytywne – znaczenie historyczne
- Systemy pozycyjne

$$A = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} r^i a_i$$

r – podstawa systemu liczbowego (***radix***)

- *A* – wartość liczby
- *a* - cyfra
- *i* – pozycja cyfry

np.

$-11{,}3125_{\text{dziesiętnie}} = -1101{,}0101_{\text{dwójkowo}}$

Reprezentacja części ułamkowej

- Liczby, które mają skończoną postać w jednym systemie, mogą mieć nieskończone rozwinięcie w innych systemach (!)

$$\text{np. } 0{,}1_{\text{dziesiętnie}} = -0{,}0(0011)_{\text{dwójkowo}}$$

Jaki będzie efekt działania tego programu?
Na czym polega błąd programisty?

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    double i;
    for(i=0; i!=1; i+=0.1) printf("%f\n",i);
}
```

Podstawa systemu liczbowego

- Podstawa systemu *r* (***radix***)
  - ma stałą wartość dla wszystkich pozycji cyfry (***fixed-radix***)

    dziesiętny, szesnastkowy, ósemkowy, dwójkowy
  - może mieć różną wartość dla różnych pozycji (***mixed-radix***)

    czas: godzina, minuta, sekunda r = (24,60,60)

    kąt: stopnie, minuty, sekundy r = (360,60,60)

    factoradic r = (... 5!, 4!, 3!, 2!, 1!) = (... 120, 24, 6, 2, 1)

    $54321_{factoradic} = 719_{dziesiętnie}$

    $5\times5! + 4\times4! + 3\times3! + 2\times2! + 1\times1! = 719$

    primoradic r = (... 11, 7, 5, 3, 2, 1)

    $54321_{primoradic} = 69_{dziesiętnie}$

    $5\times7 + 4\times5 + 3\times3 + 2\times2 + 1\times1 = 69$
  - nie musi być liczbą naturalną (liczby ujemne, wymierne, zespolone)

    $54321_{-10} = -462810_{dziesiętnie}$

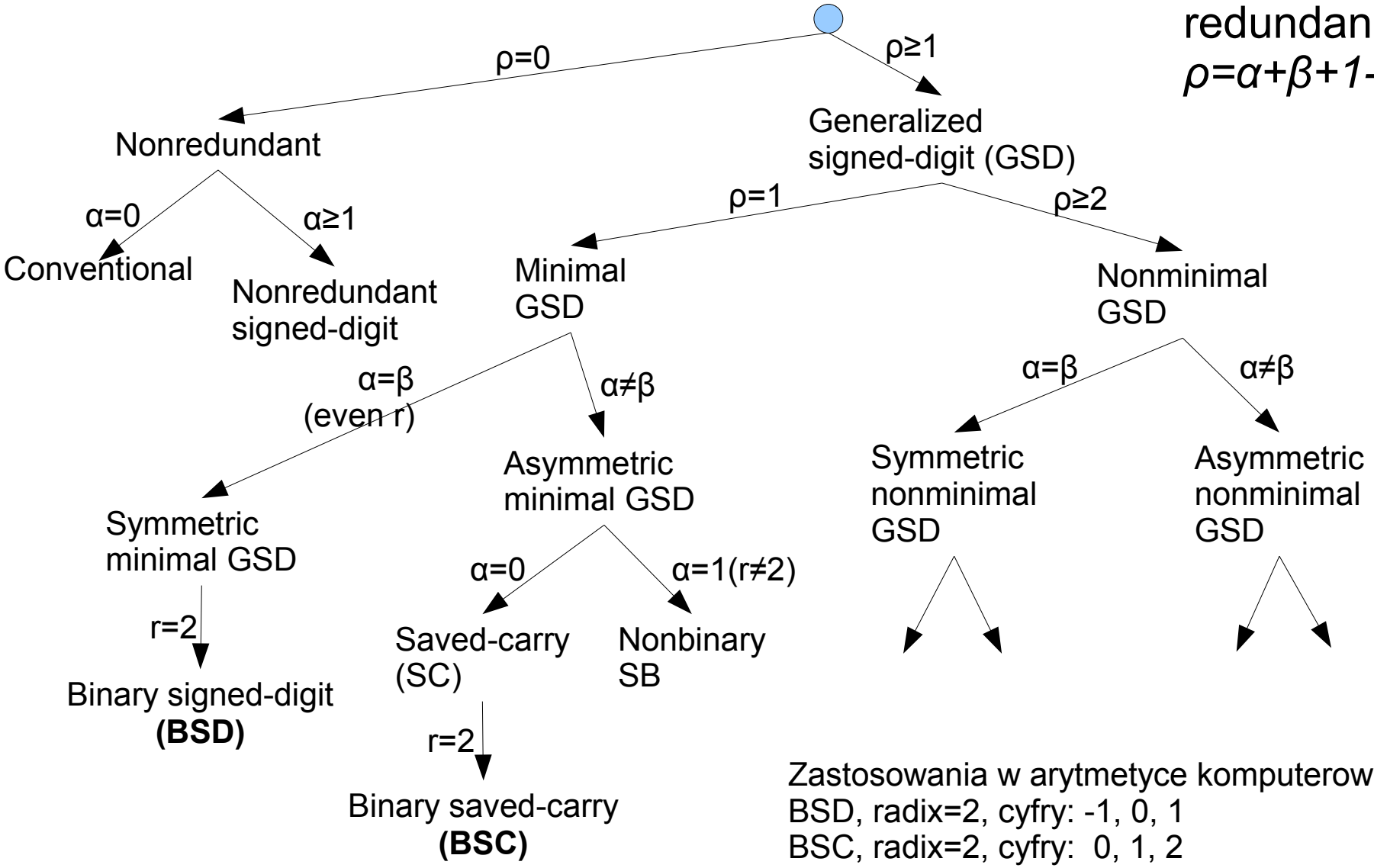
Cyfry systemu liczbowego

- System o podstawie *r*, który wykorzystuje standardowy zestaw cyfr [0..*r*-1] to system nieredundantny
  - dwójkowy → 0, 1
  - dziesiętny → 0... 9
  - szesnastkowy → 0... F
- System, który posiada więcej cyfr niż *r* jest systemem redundantnym
  - dwójkowy → 0,1,2 lub -1,0,1
  - dziesiętny → 0... 9 ♠, ♣, ♥, ♦
- W systemach redundantnych reprezentacja liczby nie jest unikalna
  - dwójkowy [0,1,2]: $1000 = 8_{\text{dziesiętnie}}$ i $0120 = 8_{\text{dziesiętnie}}$

Klasyfikacja (kryterium: redundancja)

Systemy pozycyjne o stałej podstawie *r* (*r* – liczba naturalna)
i zestawie cyfr: $[-\alpha, \beta]$

redundancja
$\rho=\alpha+\beta+1-r$



Zastosowania w arytmetyce komputerowej
BSD, radix=2, cyfry: -1, 0, 1
BSC, radix=2, cyfry: 0, 1, 2

Kodowanie liczb całkowitych

- W standardowym systemie liczbowym o podstawie *r*, za pomocą n-cyfrowej liczby:
  - można reprezentować liczby z zakresu [0 ... r^n-1]
  - liczba różnych reprezentacji wynosi r^n
    - system dwójkowy: 8-bitów, zakres 0...255, różnych liczb 256
    - system piątkowy: 3-cyfry, zakres 0...124, różnych liczb 125
- Ile cyfr potrzeba na zapis liczb w zakresie [0 ... max]?

$$n = ceil\left[\log_r(max+1)\right] = floor\left[(\log_r max)\right]+1$$

np. do zapisania 50000 liczb w kodzie dwójkowym potrzeba:

$\log_2 50000$ = 15.61 → (*ceil*) → 16 cyfr (bitów)

$\log_2 49999+1$ = 16.61 → (*floor*) → 16 cyfr (bitów)

Wybór optymalnej podstawy

- Kryteria:
  - możliwie krótka reprezentacja (małe n) i mało cyfr (małe r)
  - wygodna implementacja fizyczna
  - „proste“ algorytmy arytmetyczne

- Jaki system liczbowy (o jakiej podstawie) będzie ,,najlepszy" do kodowania liczb w zakresie [0...max]?
- Kryterium matematyczne (jedno z wielu):
  - $E(r) = r * n$

gdzie r – podstawa systemu dla n-cyfrowej liczby

Wymagany jest kompromis pomiędzy małymi wartościami r (łatwa implementacja) i n (efektywny zapis)

Wybór optymalnej podstawy (c.d.)

- Szukamy minimum funkcji *E(r)* = *r* * *n* dla *r* >1

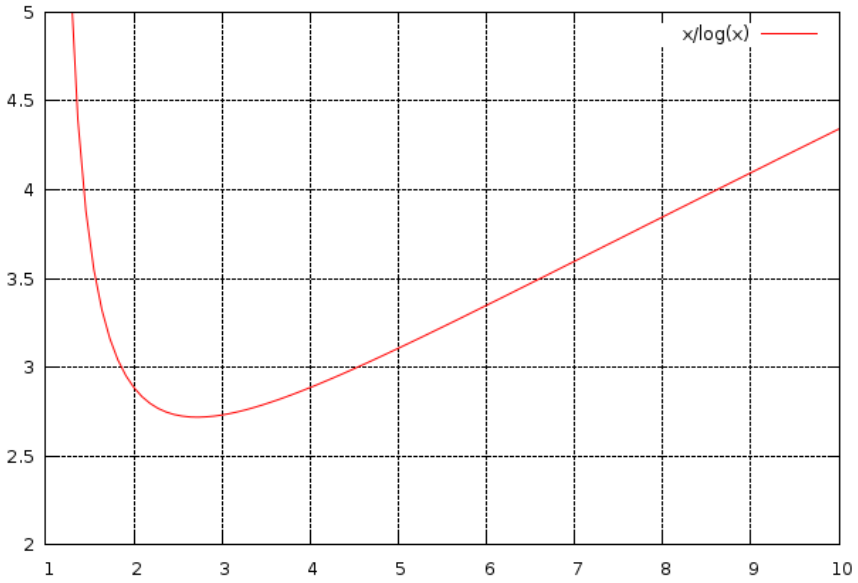
$$E(r)=r*n=r*\log_r(max+1)=r*\frac{\ln(max+1)}{\ln(r)}=\ln(max+1)*\frac{r}{\ln(r)}$$

$$\frac{dE}{dr}=\ln(max+1)*\frac{\ln(r)-1}{\ln^2(r)}=0$$

$$r_{optimal}=e=2.71$$

Optymalna, w sensie *E(r)*, podstawa to 3, ale podstawa 2 jest niewiele gorsza i dużo bardzie praktyczna ze względu na realizację fizyczną

$$\frac{E(2)}{E(3)}=1.056\,,\ \frac{E(10)}{E(2)}=1.5$$



Naturalny kod binarny (NKB, *NBC*)

- Zakładamy, że pod pojęciem NKB będziemy rozumieli
  - system stało-pozycyjny o podstawie 2 i cyfrach 0 i 1
  - n-bitową reprezentację liczb nieujemnych [0 ... max]

$$a_{n-1}a_n \ldots a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i a_i$$

4-bity: zakres 0 ... 2^4-1 → 0 ... 15 (1 cyfra hex)

8-bitów: zakres 0 ... 2^8-1 → 0 ... 255 (2 cyfry hex)

16-bitów: zakres 0 ... 2^{16}-1 → 0 ... 65 535

32-bity: zakres 0 ... 2^{32}-1 → 0 ... 4 294 967 295

64-bity: zakres 0 ... 2^{64}-1 → 0 ... 18 446 744 073 709 551 615

- NKB nie pozwala na zapis liczb ujemnych

Kody specjalne

- Kod Graya – dwójkowy kod niepozycyjny
  - że każde dwa kolejne słowa kodowe różnią się tylko stanem jednego bitu.
  - kod cykliczny – ostatni i pierwszy wyraz tego kodu także spełniają zasadę różnicy tylko na jednym bicie
  - zastosowanie: unikanie stanów przejściowych w układach elektroniki cyfrowej (przetworniki analogowo-cyfrowych, czujniki położenia/obrotu, etc.)

wartość	Gray
0	0 0 0
1	0 0 1
2	0 1 1
3	0 1 0
4	1 1 0
5	1 1 1
6	1 0 1
7	1 0 0

Kody specjalne

- Kod BCD – Binary-Coded Decimal
  - kodowanie cyfr dziesiętnych za pomocą czterech bitów, w jednym bajcie można zapisać liczbę z zakresu 0...99
  - zastosowania:
    - do sterowania wyświetlaczami cyfrowymi w urządzeniach elektronicznych
    - do przechowywania i obliczeń bezpośrednio na liczbach dziesiętnych, bez konwersji do kodu dwójkowego.

cyfra	BCD
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1

$$5127_{DEC} = 0101000100100111_{BCD}$$

Kodowanie liczb ujemnych całkowitych

- Mapowanie liczb ujemnych na zakres NKB
- Intuicyjna reprezentacja liczb ujemnych
- Proste operacje arytmetyczne (dodawanie i negacja)

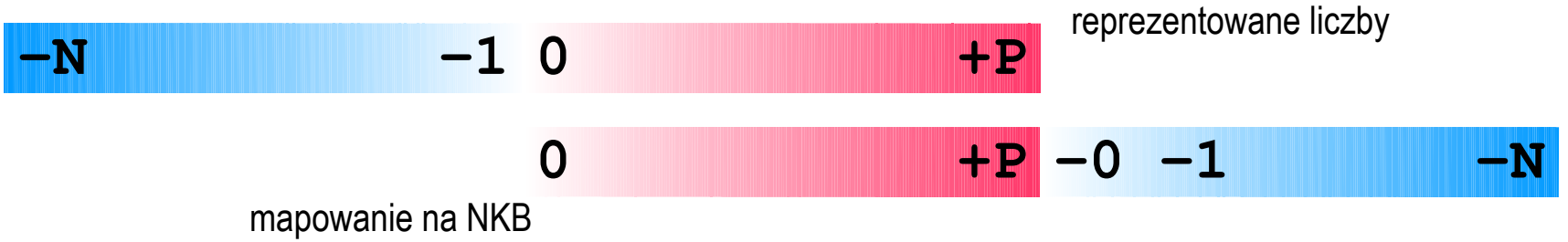
- Kod znak-moduł: ZM, (ang. *SM*)
- Kod z przesunięciem (ang. *Bias*, *Excess-N*)
- Kod uzupełnieniowy: U2, U1, (ang. *1C*, *2C*)

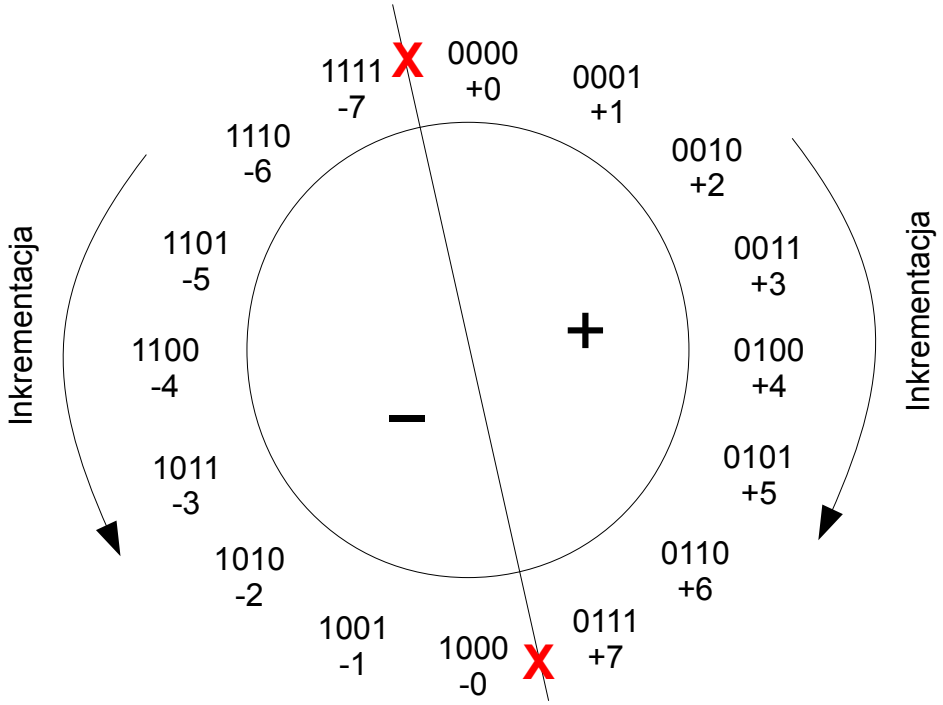
Kod znak-moduł (ZM)

- Najstarsze i najprostsze rozwiązanie
- W kodzie dwójkowym:
  - najbardziej znaczący bit liczby służy do kodowania znaku (1 – ujemna, 0 – dodatnia)
  - reprezentowane są liczby z zakresu $[-2^{n-1}+1, 2^{n-1}-1]$
  - Zalety:
    - intuicyjna reprezentacja
    - symetryczny zakres
    - proste operacja negacji
  - Wady:
    - skomplikowane dodawanie !!!
    - podwójna reprezentacja zera

$$49_{DEC} = 00110001_{ZM}$$
$$-49_{DEC} = 10110001_{ZM}$$
$$+0_{DEC} = 00000000_{ZM}$$
$$-0_{DEC} = 10000000_{ZM}$$

Kod znak-moduł (ZM)





Kody z przesunięciem (Bias, Excess-N)

- Zakres [−N, +P] jest mapowany na [0, N+P]
- Polega na dodaniu przesunięcia (bias=N) do liczby

[−4, +11] → [0, 15], bias = 4
−1 → 3

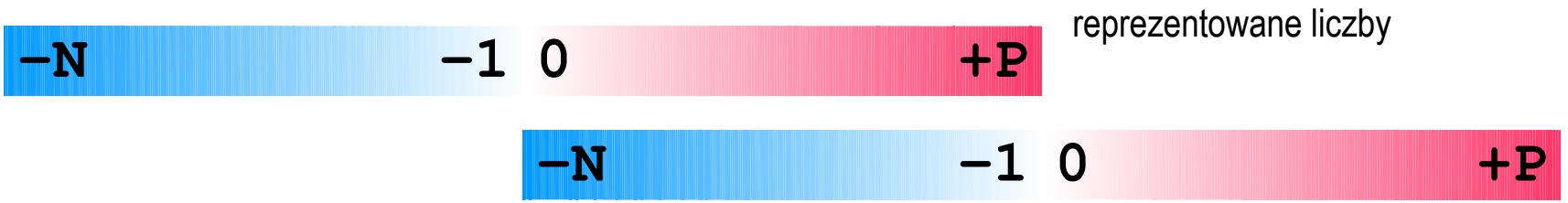
- Zalety:
  - intuicyjna reprezentacja
  - liniowe mapowanie – łatwe operacje porównania
- Wady:
  - dodawanie/odejmowanie wymaga korekcji wyniku
  - mnożenie i dzielenie dość skomplikowane

n-bitowy kod Excess-2^{n-1}

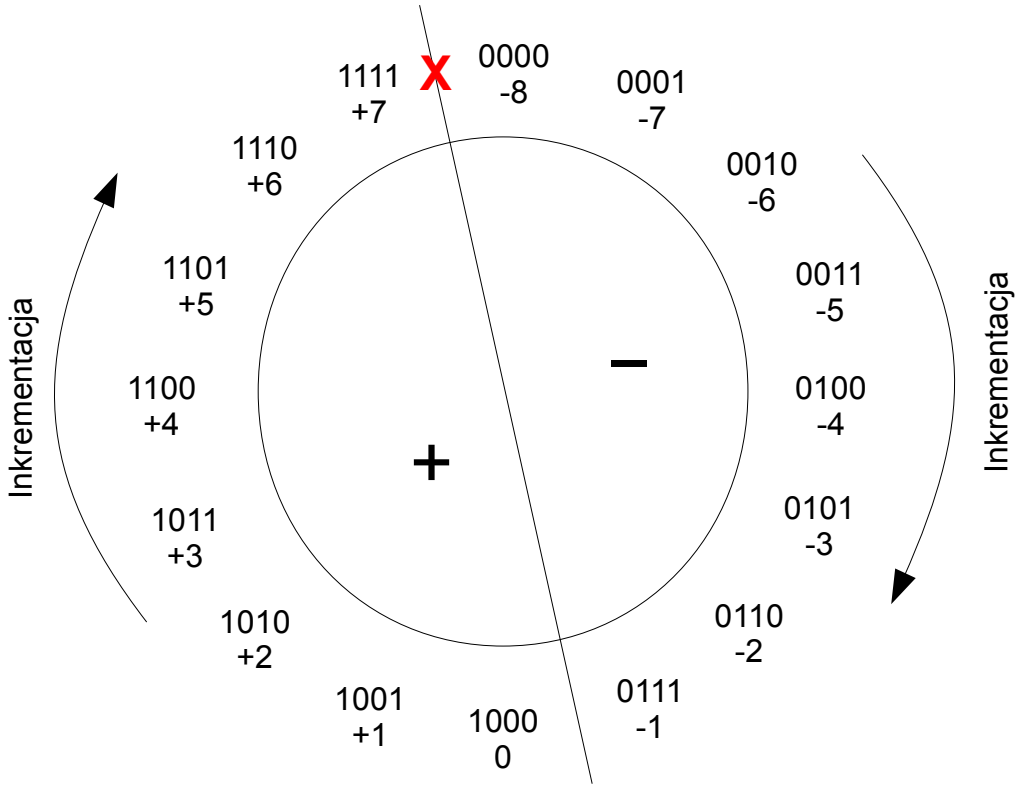
- W n-bitowym kodzie dwójkowym Excess-2^{n-1}:
  - reprezentowane są liczby z przedziału $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$
  - przesunięcie (bias) wynosi 2^{n-1} (MSB = 1, pozostałe bity 0)
  - najbardziej znaczący bit liczby powala poznać znak (0 – ujemna, 1 – dodatnia lub 0) – przeciwnie do ZM
  - dodanie lub odjęcie przesunięcia wymaga jedynie operacji na najbardziej znaczącym bicie liczby (korekta na MSB)
  - negacja liczby polega na negacji wszystkich bitów i dodaniu jedynki do całości

$$16_{DEC} \rightarrow 16_{DEC} + \text{bias} = 16_{DEC} + 128_{DEC} = 10010000_{\text{excess-128}}$$
$$-16_{DEC} \rightarrow -16_{DEC} + \text{bias} = -16_{DEC} + 128_{DEC} = 01110000_{\text{excess-128}}$$

n-bitowy kod Excess-2^{n-1}



mapowanie na NKB



Kody z przesunięciem – arytmetyka

- Operacje dodawania i odejmowania wymagają korekcji wyniku:

$X = x + bias$

$Y = y + bias$

$X + Y \rightarrow x + bias + y + bias = x + y + 2*bias \rightarrow (X + Y)$ **$- bias$**

$X - Y \rightarrow x + bias - y - bias = x - y + 0*bias \rightarrow (X - Y)$ **$+ bias$**

Operacje **±bias** to zmiana tylko bitu MSB

Uwaga na przekroczenie zakresu!

Kody uzupełnieniowe

- Zakres [−N, +P] jest mapowany na [0, N+P]
- Reprezentacja liczb dodatnie jest bez zmian
- Postać liczb ujemnych oblicza się jako uzupełnienie do stałej uzupełniania M ⟶ M = N+P+1

  −x = M − x

  [−4, +11] → [0, 15], M = 16
  −1 → 15

- Zalety:
  - proste operacje arytmetyczne, identyczna jak w NKB !!!
- Wady:
  - mało intuicyjna reprezentacja (?)

Kod uzupełnienia dwójkowego (U2)

- reprezentowane są liczby z przedziału $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$
- stała uzupełnienia M wynosi 2^n (*radix-complement*)
- najbardziej znaczący bit liczby powala poznać znak (1 – ujemna, 0 – dodatnia)
- Negacja liczby:

  $-x = M - x = 2^n - x = (2^n - 1) - x + 1 = 11...1_{BIN} - x + 1 =$

  $= \text{negacja\_bitowa}(x) + 1$
- Arytmetyka modulo-M
  - w kodzie dwójkowym: ignorowanie bitu przeniesienia (C – Carry) z pozycji n-1 (*drop carry-out*)

Kod uzupełnienia dwójkowego (U2)

- Obliczanie postaci/wartości liczby ujemnej

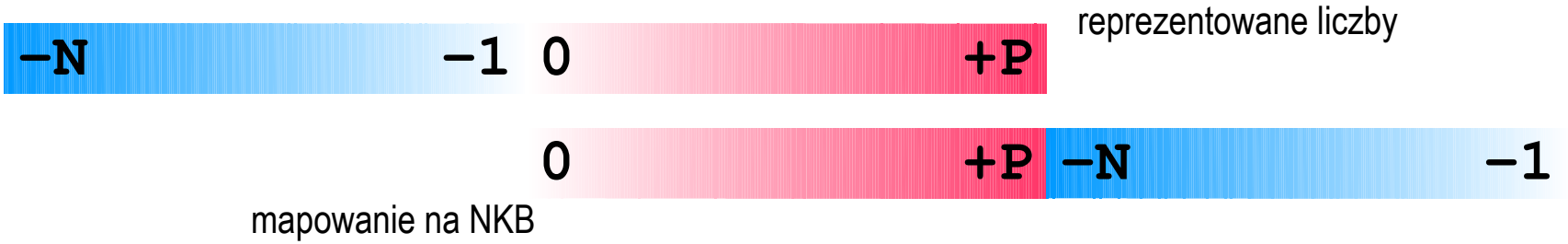
  a) negacja_bitowa(x) + 1

  b) ze wzoru definicyjnego −x = M−x

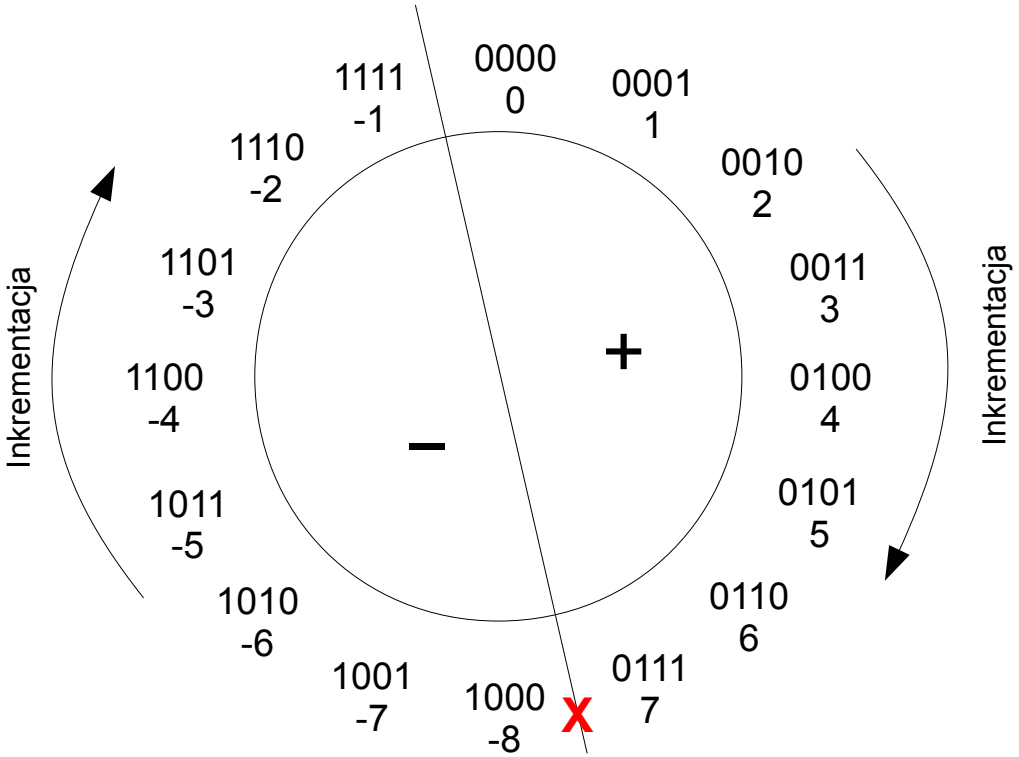
  c) ze wzoru pozycyjno-wagowego

$$A_{U2} = \underbrace{-2^{n-1} a_{n-1}}_{\text{znak z wagą ujemną}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} 2^i a_i}_{\text{moduł w NKB}}$$

Kod uzupełnienia dwójkowego (U2)



mapowanie na NKB



Kod uzupełnienia jedynkowego (U1)

- reprezentowane są liczby z przedziału $[-2^{n-1}+1, 2^{n-1}-1]$
- stała uzupełnienia M wynosi 2^n-1 (*digit-complement*)
- najbardziej znaczący bit liczby powala poznać znak (1 – ujemna, 0 – dodatnia)
- Dwie reprezentacje zera
- Negacja liczby:

  $-x = M - x = 2^n - 1 - x = 11...1_{BIN} - x = \text{negacja\_bitowa}(x)$

- Arytmetyka modulo-M
  - w kodzie dwójkowym: dodawanie bitu przeniesienia (C – Carry) z pozycji n-1 do wyniku działania (*end-around carry*)

Kod uzupełnienia jedynkowego (U1)