Metoda potencjałów węzłowych

Katedra Mikroelektroniki i Technik Informatycznych
Politechnika Łódzka

2015

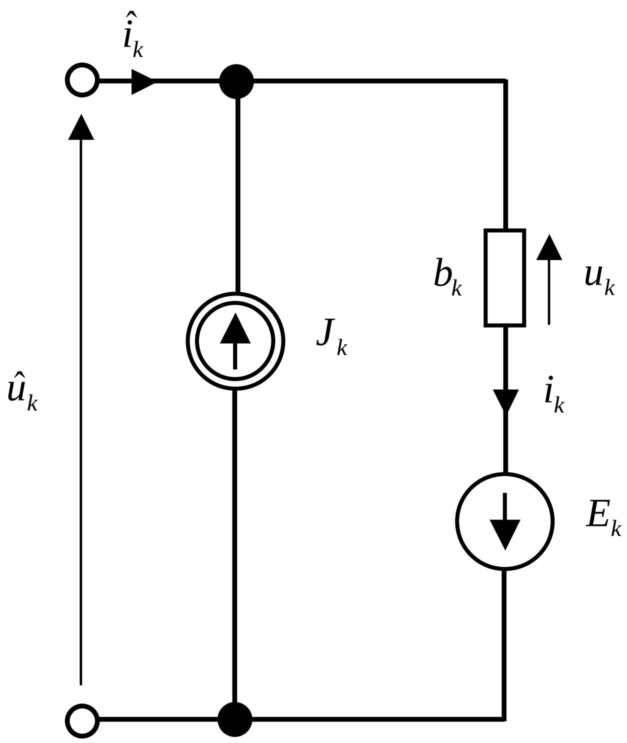
Uwagi wstępne

- **Założenie:**
  - Sieci liniowe zawierające elementy RLC, źródła niezależne napięciowe i prądowe oraz źródła prądowe sterowane napięciem

- **Powód:**
  - Łatwość napisania programu dla tej klasy obwodów
  - Możliwe uogólnienie na przypadek nieliniowych sieci rezystancyjnych

Formułowanie równań węzłowych dla liniowych sieci rezystancyjnych

Przedstawienie k-tej gałęzi sieci w postaci gałęzi złożonej



- Niezależne źródło napięciowe o sile elektromotorycznej E_k
- Niezależne źródło prądowe o wydajności prądowej J_k
- Dwójnik b_k:
  - Rezystancja liniowa
  - Źródło prądowe sterowane napięciem zależnym liniowo od innej rezystancji

Dalsze założenia

- Sieć zawiera:
  - b gałęzi
  - n+1 węzłów

- Numeracja:
  - gałęzie od 1 do b
  - węzły od 0 do n
  - węzeł 0 oznaczmy jako węzeł odniesienia, napięcia występujące na pozostałych węzłach oznaczamy jako napięcia węzłowe

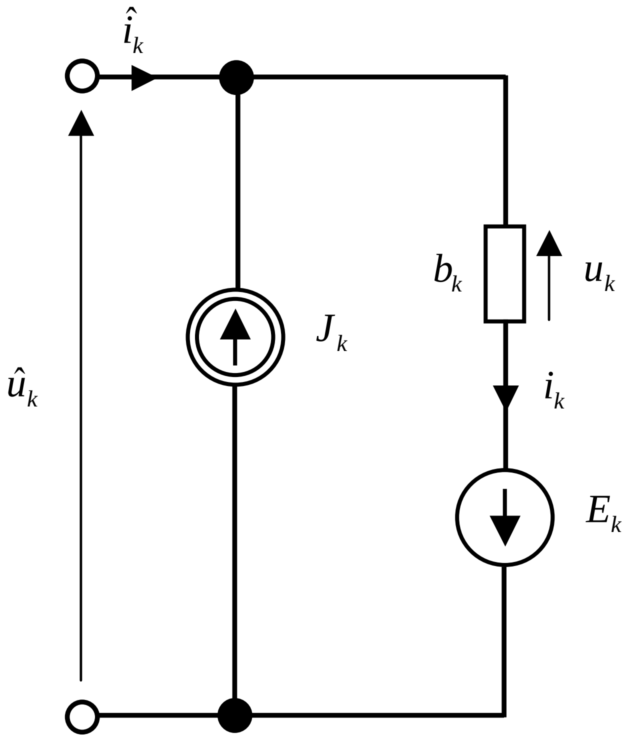
Definicja wektorów napięć

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{u}_b \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_b \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ . \\ . \\ . \\ E_b \end{bmatrix}$$

Definicja wektorów prądów

$$\hat{i} = \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{i}_b \end{bmatrix} \qquad i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ . \\ . \\ . \\ i_b \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ . \\ . \\ . \\ J_b \end{bmatrix}$$

Równania prądowe Kirchhoffa



$$\hat{u} = u - E$$

$$\hat{i} = i - J$$

$$A\hat{i} = 0$$

$$Ai = AJ$$

Opis elementów

- Każdy dwójnik b_k można opisać następującymi równaniami:
  - dla rezystora:

$$i_k = \frac{1}{R_k} u_k$$

  - dla źródła prądowego sterowanego napięciem u_j o wsp. sterowania g_{kj}

$$i_k = g_{kj} u_j$$

Równania elementów

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ . \\ . \\ . \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1b} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2b} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ y_{b1} & y_{b2} & \cdots & y_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_b \end{bmatrix}$$

Rezystor

$$y_{k\alpha} = \begin{cases} 0, \alpha \neq k \\ 1/R_k, \alpha = k \end{cases}$$

Źródło sterowane

$$y_{k\alpha} = \begin{cases} 0, \alpha \neq j \\ g_{kj}, \alpha = j \end{cases}$$

Równanie ogólne

Równania elementów zapisane macierzowo

$$i = Y_b u$$

ponieważ:

$$Ai = AJ$$

$$\hat{u} = u - E$$

stąd:

$$AY_b u = AJ$$

$$AY_b \hat{u} = A\left(J - Y_b E\right)$$

Równanie ogólne cd.

transformacja węzłowa

$$\hat{u} = A^T u_n$$

stąd:

$$\left(AY_b A^T\right)u_n = A\left(J - Y_b E\right)$$

Równanie opisujące potencjały węzłowe

$$\boxed{Y_n u_n = J_n}$$

Równanie ogólne cd.

Macierz admitancji węzłowych:

$$Y_n = AY_b A^T$$

Wektor węzłowych wydajności prądowych:

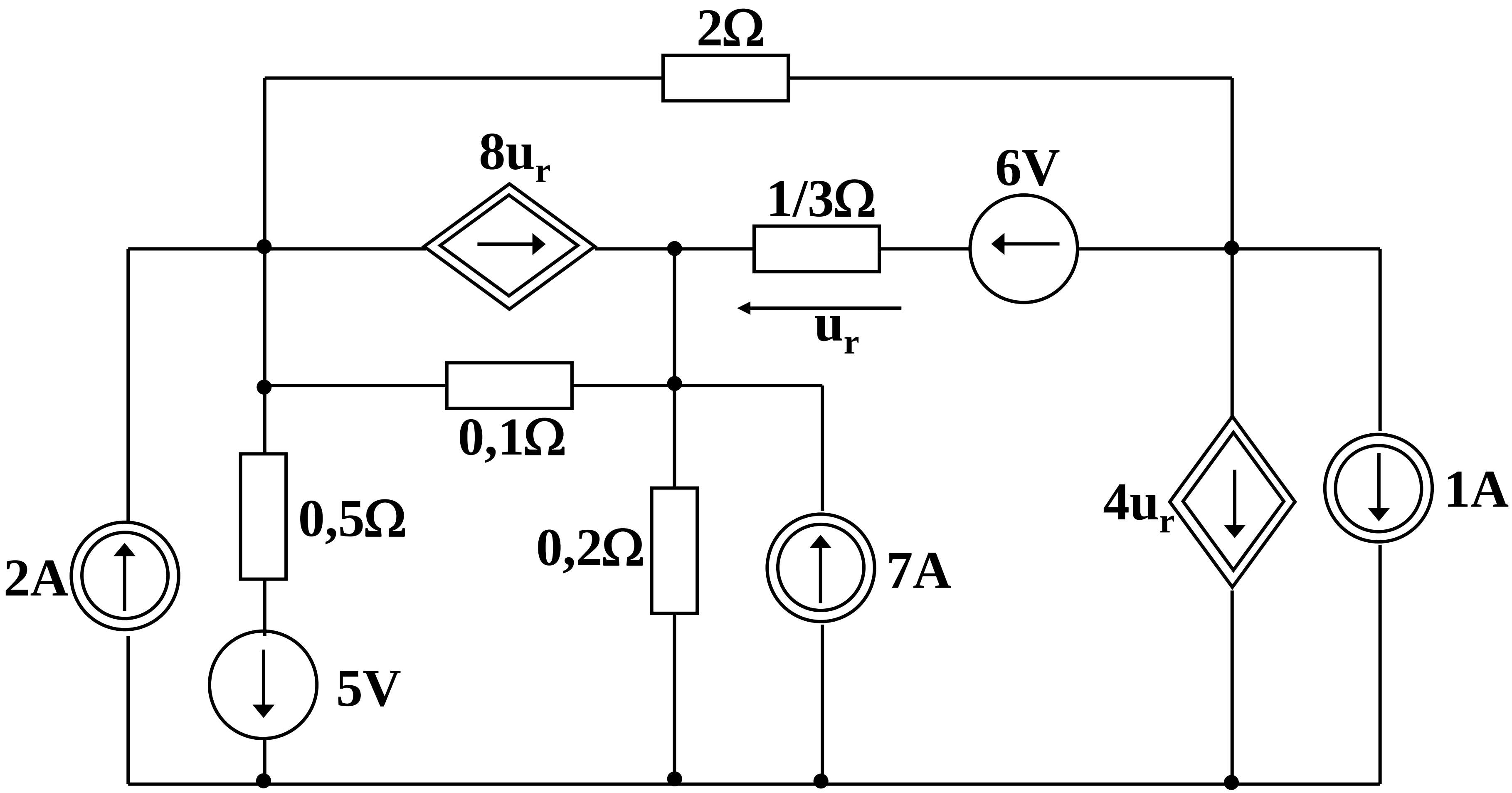
$$J_n = A\left(J - Y_b E\right)$$

Równanie umożliwiające wyznaczenie potencjałów węzłowych

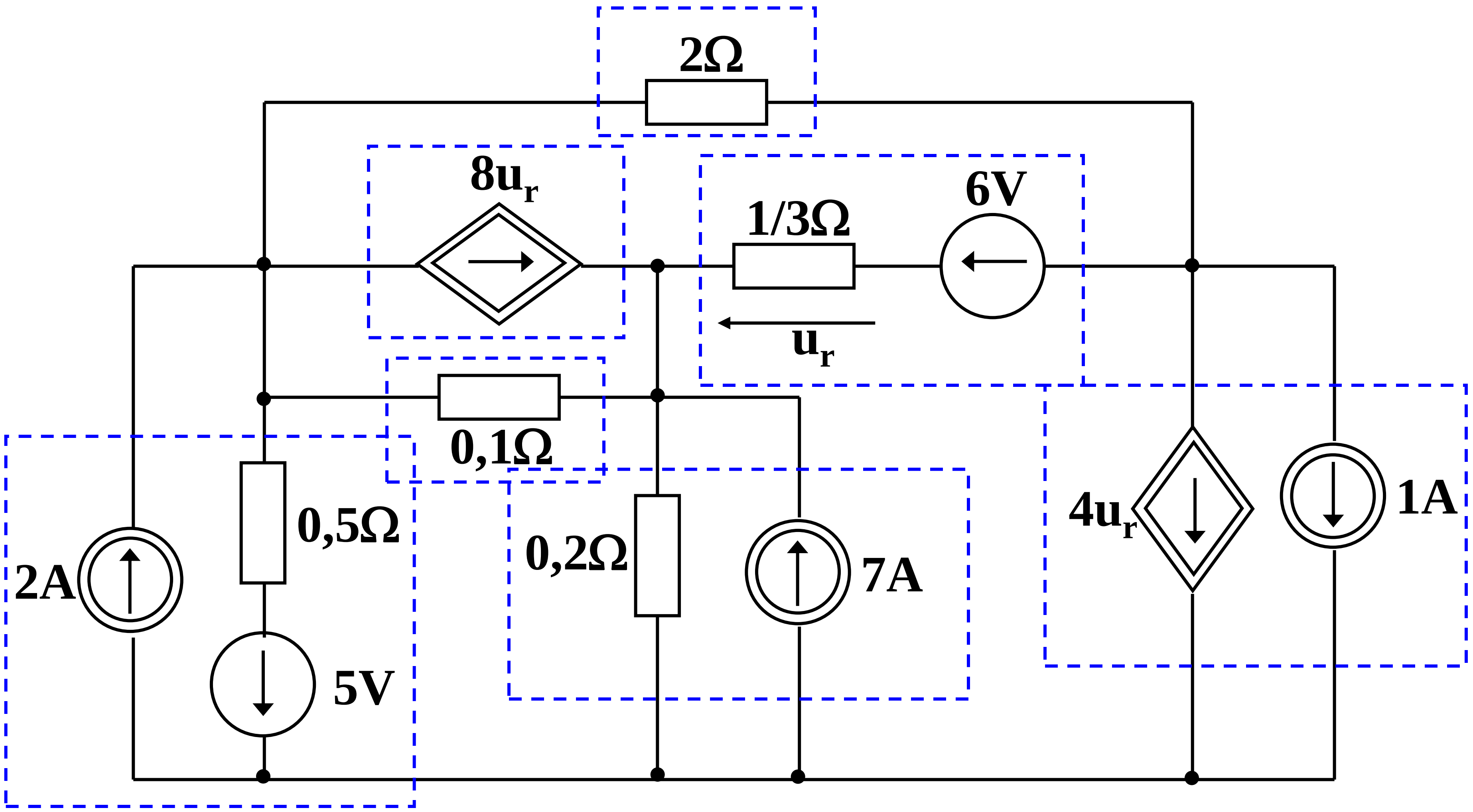
$$\boxed{u_n = Y_n^{-1} J_n}$$

W programie SPICE stosowana w wersji zmodyfikowanej!

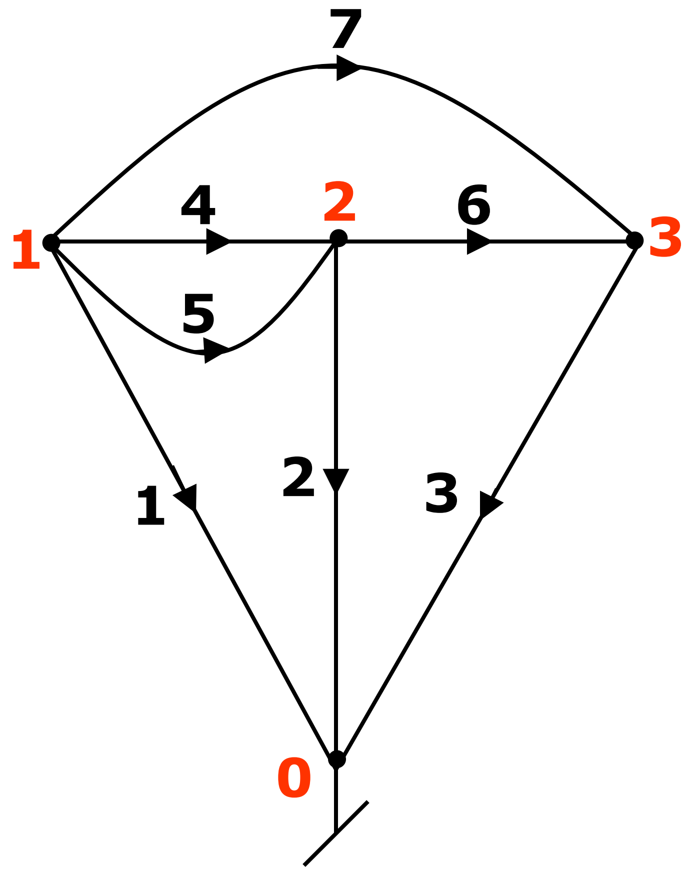
Przykład



Przykład



Przykład



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Przykład

$$Y_b = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przykład

$$Y_n = AY_bA^T = \begin{bmatrix} 12,5 & -2 & -8,5 \\ -10 & 10 & 5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \end{bmatrix}$$

$$J_n = A\left(J - Y_bE\right) = \begin{bmatrix} -1,5 \\ 38 \\ -6,5 \end{bmatrix}$$

$$u_n = Y_n^{-1}J_n = \begin{bmatrix} 12,35 \\ 7,91 \\ 16,47 \end{bmatrix}$$

Bibliografia

1. L.O. Chua, P.M. Lin, Komputerowa analiza układów elektronicznych, WNT, Warszawa, 1981
2. J. Porębski, P. Korohoda, SPICE: Program analizy nieliniowej układów elektronicznych, Wydanie piąte, WNT, Warszawa, 1996